Ueber

Geodätische Linien

auf

Rotationsflächen

und jene

Einhüllenden

derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden.

Inaugural - Dissertation

einer hohen philosophischen Facultät

der Universität München

vorgelegt von

Anton von Braunmühl,

Assistent am k. Realgymnasium.

MÜNCHEN,
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1878.

Ueber

Geodätische Linien

auf

Rotationsflächen

und jene

Einhüllenden

derselben, welche von allen durch einen Punkt gehenden kürzesten Linien gebildet werden.

Inaugural-Dissertation

einer hohen philosophischen Facultät

der Universität München

vorgelegt von

Anton von Braunmühl,

Assistent am k. Realgymnasium.

MÜNCHEN,
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.
1878.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554608_0090

§ 1.

Einleitung.

Eine geodaetische Linie wird bekanntlich von einem Punkte beschrieben, der durch einen anfänglichen Stoss fortgetrieben auf einer Oberfläche sich bewegt, ohne dass Anziehungskräfte auf ihn wirken. Ist die vorliegende Fläche eine Rotationsfläche, so lassen sich die Lagrange'schen Differentialgleichungen durch die Integrale der lebendigen Kraft und der Flächen in Bezug auf die Rotationsaxe ersetzen. Hiedurch erhält man:

$$\frac{v^2}{2} = h \text{ und } r^2\varphi' = \text{const.}$$

wo v die Geschwindigkeit und h die Constante der lebendigen Kraft ist und r und φ Polarcoordinaten bedeuten, deren Differentialquotienten nach der Zeit durch r' und φ' bezeichnet seien. Wir setzen nun fest v_0 sei die Anfangsgeschwindigkeit des Punktes, ν eine Constante

und $$\text{const.} = \nu \cdot v_0,$$

dann folgt

$$h = \frac{{v_0}^2}{2},\ r^2\varphi' = \nu v_0;\ v^2 = r'^2 + r^2\varphi'^2 + y'^2 = {v_0}^2,$$

wenn $y - f(r) = o$ die Gleichung der Rotationsfläche bedeutet. Wenn nun ein Parallelkreis existirt, den die kürzeste Linie berührt, so muss für ihn $r' = o$ und $y' = o$ sein, womit aus der letzten Gleichung folgt: $r^2\varphi'^2 = {v_0}^2$ oder mit Benützung der vorletzten: $r = \nu$. Das heisst, wenn ein

solcher Kreis existirt, so ist sein Radius $r = \nu$. Dies tritt aber nur dann ein, wenn ν grösser oder gleich dem Radius des kleinsten Parallelkreises der Fläche ist.

Eliminirt man nun aus den Differentialgleichungen der Bewegung die Zeit, so ergibt sich:

$$\text{I} \ldots\ldots\ldots \varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}}$$

als Gleichung der Projection der geodaetischen Linien auf die Aequatorialebene.

Es soll nun zunächst der noch wenig bekannte Verlauf geodaetischer Linien auf Rotationsflächen betrachtet werden, da eine genaue Kenntniss derselben für die Theorie der Enveloppen dieser Linien, welche den Hauptgegenstand vorliegender Abhandlung bildet, von grosser Wichtigkeit ist.

§ 2.

Geodaetische Linien auf Flächen mit Kehlkreisen.

Zwischen der Constanten ν und dem Winkel ϑ, unter welchem die kürzeste Linie einen Parallelkreis mit dem Radius r schneidet, besteht die Gleichung:

$$\nu = r \cos \vartheta \text{ *)},$$

aus welcher man abermals entnehmen kann, dass $r = \nu$ ein Grenzkreis für die geodaetische Linie ist, die mithin jene Teile der Fläche nicht betritt, für welche $r < \nu$ ist.

Besitzt die Fläche zu beiden Seiten des grössten Parallelkreises, dessen Radius $r = \alpha$ sei, einen solchen Grenzkreis ν, so wird eine kürzeste Linie, die diesen Kreis unter dem Winkel $\vartheta = \arccos\left(\frac{\nu}{\alpha}\right)$ schneidet, auf der einen

*) Bezüglich der Ableitung dieser Gleichung verweise ich auf: Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die allgemeine Theorie der Flächen etc. Leipzig 1872.

Seite desselben bis zur Grenze $r = \nu$ verlaufen, nachdem sie diese berührt hat, wieder zurückkehren, den grössten Kreis abermals überschreitend zur zweiten Grenze $r = \nu$ gelangen und in dieser Weise ihren Lauf periodisch fortsetzen.

Da aber die Constante ν offenbar auch kleiner werden kann, als der Radius des kleinsten Kehlkreises der Fläche, so muss es auch Linien geben, die, ohne von einer Begränzung gehindert zu sein, die ganze Fläche durchlaufen; zu diesen gehört z. B. der Meridian.

Wir haben noch den Zwischenfall in's Auge zu fassen, für den $\nu = \beta$, gleich dem Radius eines Kehlkreises der Fläche wird. Diesem Parallelkreise entspricht in der Meridiankurve jedenfalls ein Punkt des Minimums; ist nun derselbe kein Rückkehrpunkt, so muss die Tangente in ihm parallel zur Rotationsaxe y, also $\frac{dy}{dr} = f'(r) = \infty$ sein; dann ist aber auch $\pm \sqrt{1 + f'^2} = \pm \infty$, d. h. der genannte Punkt ist ein Unstetigkeits- und Verzweigungspunkt der Funktion unter dem Integralzeichen in Gleichung I, in welchem das Integral selbst endlich bleiben oder unendlich werden kann. Wird nun aber $\nu = \beta$, so fällt mit diesem Verzweigungspunkte auch jener andere $r = \nu$ zusammen, da ja $\sqrt{r - \nu} = \sqrt{r - \beta}$ wird, der Verzweigungspunkt β geht also in einen solchen Unstetigkeitspunkt über, in welchem das Integral I für jeden Fall unendlich werden muss. Denn bezeichnet man die Funktion, welche übrig bleibt, wenn man aus $(1 + f'^2)^{\frac{1}{2}}$ den Verzweigungspunkt β absondert, mit Ω und nimmt man an, $r - \beta$ sei in $(1 + f'^2)^{\frac{1}{2}}$ in der Potenz $-\frac{n}{2}$ vorhanden, so hat man:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}} = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \frac{\Omega}{(r-\nu)^{\frac{1}{2}}(r-\beta)^{\frac{n}{2}}(r+\nu)^{\frac{1}{2}}}$$

oder für $\nu = \beta$:

$$\varphi = \beta \int_{r_0}^{r} \frac{dr\,\Omega}{r\,(r-\beta)^{\frac{n+1}{2}}(r+\beta)^{\frac{1}{2}}}$$

Nun ist aber:

$$\lim_{r=\beta}\left\{\frac{\Omega(r-\beta)}{r\,(r-\beta)^{\frac{n+1}{2}}(r+\beta)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \left\{\frac{\Omega}{r(r-\beta)^{\frac{n-1}{2}}(r+\beta)^{\frac{1}{2}}}\right\} = \begin{cases}\text{Const.}\\ \infty\end{cases}$$

je nachdem $n \gtrless 1$ ist. Für beide Fälle wird also das Integral nach einem bekannten Satze der neuern Funktionentheorie unendlich. Das bedeutet aber doch nichts anderes, als die geodaetische Linie, welche dem Werte β der Constanten ν entspricht, nähert sich in unzähligen Windungen asymptotisch dem kleinsten Kehlkreis der Fläche.

Liegt eine Meridiankurve vor, welche mehrere Minima besitzt, so treten diese sämmtlich als Kehlkreise der Fläche und als Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte im Integral der Linien auf. Fällt also ν mit der Abscisse r eines solchen Punktes zusammen, so findet genau dasselbe statt, wie im vorhergehenden Falle, ohne dass gerade die in Rede stehende Ordinate dem kleinsten der vorhandenen Minima zu entsprechen braucht.

Fassen wir das Erörterte zusammen, so können wir den Satz aufstellen: „Erstreckt sich eine geodaetische Linie bis zu einem Kehlkreise einer Rotationsfläche, so durchsetzt sie denselben entweder unter irgend einem Winkel oder nähert sich ihm asymptotisch.“

Einfache Beispiele hiefür bieten das Hyperboloid und die Flächen konstanter mittlerer Krümmung, auf die ich später zurückkommen werde.*)

---

*) Ein Beispiel, welches den Zusammenhang des Laufes der

§ 3.

Linien auf Flächen, deren kleinste Parallelkreise im Unendlichen liegen.

Wir betrachten den Fall, in welchem das Integral I für $r = \beta$ von irgend welcher Ordnung unendlich wird und,

---

kürzesten Linien mit der Funktion unter dem Integralzeichen in I. deutlicher erkennen lässt, ist folgendes.

Es sei:

$$x = 1 + \cos y + 2\cos^2 y$$

die Gleichung des Meridians einer Rotationsfläche. Ist y die Rotationsaxe, so setzen wir statt x, $\sqrt{x^2 + z^2} = r$ und erhalten die Flächengleichung:

$$r = 1 + \cos y + 2\cos^2 y .$$

Hieraus ergibt sich:

$$\frac{dy}{dr} = f' = -\frac{1}{\sin y\,(1 + 4\cos y)}$$

und mit Hilfe der Kurvengleichung:

$$f' = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{(8r-7)\,.\,(11 - 4r \pm \sqrt{8r-7})}}$$

Berechnet man hieraus $(1 + f'^2)^{\frac{1}{2}}$ und führt den Wert in Gleichung I ein, so erhält diese die Gestalt:

$$\varphi = \nu \,.\, \int_{r_0}^{r} \frac{dr\,.\,8 + (8r-7)(11 - 4r \pm \sqrt{8r-7})}{r\sqrt{(r^2-\nu^2)(8r-7)(11-4r\pm\sqrt{8r-7})(8+(8r-7).(11-4r\pm\sqrt{8r-7}))}}$$

Die Curve (Fig. 1) besitzt die Maxima $r = 4$, $r = 2$ und das Minimum $r = \frac{7}{8}$.

Lässt man nun eine geodaetische Linie vom Aequator $r = 4$ ausgehen und wählt ν zwischen $r = 4$ und $r = \frac{7}{8}$, so sind die Differenzen $r - \nu$ und $8r - 7$ positiv, und φ erhält daher lauter reelle Werte, d. h. die entsprechende geodaetische Linie bewegt sich periodisch in dem durch die beiden Grenzkreise $r = \nu$ abgeschlossenen Teil der Fläche.

Wird $\nu = \frac{7}{8}$ gewählt, so tritt der Factor $(8r - 7)$ vor das Wurzelzeichen, und wenn man die ganze Funktion unter dem Integralzeichen

indem wir uns auf algebraische Funktionen unter dem Integralzeichen beschränken, untersuchen wir, bei welchen Flächengattungen dies eintreten kann. Es wird sich zeigen, dass die Ordinate des Minimums der Meridiancurve einer solchen Fläche unendlich wird und die Curve im Unendlichen einen Wendepunkt besitzt, dessen Asymptote $x = \beta$ ist.

Um dies nachzuweisen stellen wir den Krümmungshalbmesser der Kurve für den fraglichen Punkt auf und sehen zu, ob derselbe unendlich wird. Dieser Krümmungsradius ist:

$$R = \frac{(1 + f'^2)^{\frac{3}{2}}}{f''}$$

Ich setze nun $(1 + f'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{\Phi}{(r - \beta)^{\frac{n}{2}}}$, wo „n" eine beliebige positive ganze oder gebrochene Zahl, jedoch $\gtrless 2$ ist, damit

---

einen Augenblick mit ψ (r) bezeichnet, so überzeugt man sich leicht, dass jetzt

$$\lim. \left\{ (8r - 7)\, \psi(r) \right\} = \text{Const.}$$

ist; also wird unser Integral in dem fraglichen Punkt nach bekannten Kriterien logarithmisch unendlich, und die entsprechende Linie nähert sich langsam asymptotisch dem Kehlkreise $r = \frac{7}{8}$.

Nehmen wir $\nu < \frac{7}{8}$, so muss sich eine Linie ergeben, welche die ganze Fläche durchläuft. In der That: setzt man etwa wieder $r_0 = 4$ und lässt r von r_0 an abnehmen, so behält die Wurzel des Factors $11 - 4r \pm \sqrt{8r - 7}$. das positive Vorzeichen bis r den Wert $\frac{7}{8}$ erreicht' dann wird $\sqrt{8r - 7}$ zu Null und geht nun mit dem negativen Vorzeichen weiter, indem die Linie den Kehlkreis schneidet und zum Kreise $r = 2$ emporsteigt; für $r = 2$ wird der Factor $11 - 4r \pm \sqrt{8r - 7} = 0$, die Wurzel $\sqrt{8r - 7}$ behält aber ihr negatives Vorzeichen bis zum nächsten Minimum bei. Hieraus erkennt man deutlich, in welcher Weise sich die Linie über die ganze Fläche hinzieht.

$$\lim_{r=\beta} \left\{ \frac{\Phi(r-\beta)}{(r-\beta)^{\frac{n}{2}}} \right\} = \begin{cases} \text{Const} \\ \infty \end{cases}$$

sein, und das Integral der Linien in dem fraglichen Punkte einen unendlichen Wert annehmen könne. Dann ergibt sich

$$f' = \frac{\left\{ \Phi^2 - (r-\beta)^n \right\}^{\frac{1}{2}}}{(r-\beta)^{\frac{n}{2}}}$$

$$f'' = \frac{r-\beta \cdot \frac{d\,(\Phi^2-(r-\beta)^n)^{\frac{1}{2}}}{dr} - \frac{n}{2}(\Phi^2-(r-\beta)^n)^{\frac{1}{2}}}{(r-\beta)^{\frac{n+2}{2}}} = \frac{\Psi}{(r-\beta)^{\frac{n+2}{2}}},$$

wo Ψ für $r=\beta$ endlich ist. Hieraus folgt:

$$R = \frac{\Phi^3}{\Psi} \frac{1}{(r-\beta)^{n-1}},$$

welcher Ausdruck in der That für $r=\beta$ unendlich wird. Die Meridiane solcher Flächen haben also etwa die Gestalt, wie sie in Fig. 2 angegeben, wo jedoch die Existenz anderer im Endlichen gelegener Maxima und Minima nicht ausgeschlossen ist. Die zu beiden Seiten der Ebene der xz gelegenen Teile einer solchen Rotationsfläche hängen mithin im Unendlichen zusammen, und Linien, die den kleinsten Parallelkreis überschreiten, für die also $\nu < \beta$ ist, kehren daher auf dem andern Flächenteile wieder, während jene Linie, die für $\nu = \beta$ resultirt, sich dem unendlich fernen Kreise asymptotisch nähert; dabei wird φ algebraisch unendlich, während, wenn der Minimalkreis β im Endlichen liegt, φ nur logarithmisch unendlich wird.

Ein Beispiel für den Fall dieses § bietet die Curve:

$$y = \frac{1}{\sqrt{\alpha-\beta}} \log \frac{\sqrt{\alpha-\beta} - \sqrt{\alpha-x}}{\sqrt{\alpha-\beta} + \sqrt{\alpha-x}},$$

oder:

$$\frac{\alpha-x}{\alpha-\beta} = \left\{ \frac{1-e^{y\sqrt{\alpha-\beta}}}{1+e^{y\sqrt{\alpha-\beta}}} \right\}^2,$$

wo α der Radius des Aequators, β der des Kehlkreises ist.

Der Krümmungshalbmesser der Meridiankurve ist:

$$R = \frac{[1 + (\alpha - \beta)(\alpha \quad r)(r - \beta)^2]^{\frac{3}{2}}}{r - \beta \,.\, \sqrt{(\alpha - r)} \,.\, (\alpha - \beta)},$$

welcher für $r = \beta$ unendlich wird. Die Gleichung der geodaetischen Linien dieser Fläche wird:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr \,.\, 1 + \alpha - \beta \,.\, \alpha - r \,.\, (r - \beta)^2}{r \,.\, r - \beta \,.\, \sqrt{\alpha - \beta \,.\, \alpha - r \,.\, r^2 - \nu^2}}$$

und da

$$\lim. \left\{ (r - \beta)\, \chi(r) \right\}_{r=\beta} = \frac{1}{\beta\, (\alpha - \beta)\, \sqrt{\beta^2 - \nu^2}}$$

ist, wo χ (r) die Funktion unter dem Integralzeichen bedeutet, so ist φ für $r = \beta$ logarithmisch unendlich für eine jede Linie, deren $\nu < \beta$ ist. Betrachtet man hingegen jene Kurve, welche für $\nu = \beta$ erscheint, so ist erst

$$\lim. \left\{ (r - \beta)^{\frac{3}{2}}\, \chi(r) \right\}_{r=\beta} = \text{Const.}$$

und somit φ für $r = \beta$ algebraisch unendlich von der Ordnung $\frac{3}{2}$. Es nähert sich also das φ dieser Linie dem Unendlichen viel rascher, als bei jenen Curven, welche man für $\nu < \beta$ erhält und die auf der andern Seite der Aequatorebene aus dem Unendlichen wieder zurückkehren.

Die hier erhaltenen Resultate werden in der Theorie der Enveloppen an Interesse gewinnen.

§ 4.

Linien auf Flächen, welche die Rotationsaxe schneiden.

Fassen wir nun Flächen in's Auge, welche die Rotationsaxe schneiden. Man erkennt leicht, dass bei diesen Flächen, solange r positiv ist, ν nur die Werte $\nu \geq o$ annehmen

kann, niemals aber kleiner als Null wird, wenn die entsprechende geodaetische Linie reell sein soll Denn die Linien, für welche $\nu < 0$ wäre, müssten, wie bereits nachgewiesen, alle den kleinsten Kreis schneiden, d. h. durch den Punkt $r = 0$ gehen. Nun hatten wir aber die Relation:

$$\cos \vartheta = \frac{\nu}{r}.$$

Hätte jetzt ν einen von Null verschiedenen Wert, so müsste im Punkte $r = 0$, $\cos \vartheta = \infty$ sein, was nicht möglich ist; nur wenn ν den Wert Null besitzt, ist

$$\cos \vartheta = \frac{0}{0}$$

und hat einen festen Wert. Die Linie, welche für $\nu = 0$ erscheint, ist aber nichts anderes, als der Meridian, denn aus Gleichung 1 folgt $\varphi = 0$ für jeden Wert von r.

Würde sich ferner die Meridiankurve der Fläche auf die negative Seite der Abscissenaxe erstrecken, so könnte allerdings auch ν negativ gewählt werden, aber dann müsste auch r negativ sein, und wir hätten wieder denselben Fall. Genau das Gleiche gilt natürlich auch, wenn der Punkt $r = 0$ im Unendlichen liegt, und die Rotationsaxe Asymptote der Fläche ist, da sich in der vorhergehenden Schlussweise nichts ändert.

Die angestellte Betrachtung berechtigt somit zu dem Schlusse: „Auf Flächen, welche die Rotationsaxe, sei es im Endlichen, oder Unendlichen treffen, gibt es nur eine einzige geodaetische Linie, die diesen Schnittpunkt passirt, und diese ist der Meridian.“

§ 5.

Verhalten der geodaetischen Linien in Rückkehrkanten.

Besitzt die Meridiankurve einer Fläche Spitzen, so haben wir zwei Fälle zu unterscheiden: den Fall nämlich,

wenn die Tangente des Rückkehrpunktes nicht parallel der Rotationsaxe und den, wenn sie parallel derselben ist. Dabei setzen wir voraus, dass die Kante nicht einem Maximum der Meridiankurve entspricht. Es sei für einen solchen Punkt $r = \alpha$, so kann derselbe im ersten Falle nicht als Unstetigkeitspunkt im Integral der geodaetischen Linien auftreten, da für ihn f' und somit $1 + f'^2$ nie unendlich wird Im zweiten Falle hingegen ist für $r = \alpha, f'$ und mithin auch $1 + f'^2$ unendlich, also $r = \alpha$ ein Unstetigkeitspunkt des Integrales.

Betrachten wir zunächst eine Linie, für welche $\nu < \alpha$ ist, so wird sich diese, wenn $r = \alpha$ nicht dem kleinsten Parallelkreis der Fläche entspricht, auf der einen Seite des zunächst liegenden Maximalkreises bis zur Grenze $r = \nu$ hinziehen, daselbst wieder umkehren und auf der andern Seite des genannten Kreises in der Rückkehrkante $r = \alpha$ anlangen. Nun ist im ersten Falle allerdings, wie man aus Gleichung I erkennt, eine analytische Fortsetzung der Linie über die durch die Rückkehrkante begränzte Fläche hinaus bis zu dem zweiten Grenzkreise $r = \nu$, welcher nicht mehr auf der Fläche liegt, möglich, hat aber offenbar keinen geometrischen Sinn. Denn diesen Grenzkreis $r = \nu$ würde die Linie wieder tangiren und bei $r = \alpha$ abermals den nämlichen Flächenteil betreten, jedoch natürlich nicht mehr in dem gleichen Punkte, in dem sie denselben verlassen, da ja φ während der ganzen Bewegung sich continuirlich geändert; es ist somit von geometrischem Standpunkte kein Grund vorhanden, diese neu erscheinende Linie als Fortsetzung der ersten zu betrachten. Man wird also immerhin annehmen können, dass die kürzesten Linien in der Rückkehrkante aufhören.

Im zweiten Falle hingegen, in dem $r = \alpha$ ein Unstetigkeitspunkt des Integrals der geodaetischen Linien ist, finden die für $\nu < \alpha$ erscheinenden Linien, wie sich aus der voraus-

gehenden Betrachtung mit Leichtigkeit ergibt, kein Hinderniss in der Rückkehrkante, überschreiten dieselbe und ziehen sich bis zum Grenzkreise $r = \nu$, den sie berühren, um ihren Lauf periodisch fortzusetzen.

Wenn jetzt die Constante ν kleiner als der Radius des kleinsten Kehlkreises der Fläche ist, so ändert sich in der Betrachtung weiter nichts, als dass die Linien die ganze Fläche durchziehen, ohne an einer Grenze umzukehren.

Fasst man ferner noch die Kurve ins Auge, welche für $\nu = \alpha$ resultirt, so ergibt sich, dass sie im ersten Falle (α kein Unstetigkeitspunkt) den Parallelkreis $r = \nu = \alpha$, wie jeden andern Grenzkreis berührt, im zweiten Falle hingegen ($r = \alpha$, ein Unstetigkeitspunkt) sich der Rückkehrkante asymptotisch nähert, da ja zwei Unstetigkeits- und Verzweigungspunkte in einen zusammenfallen.

Als Beispiel für den ersten der beiden betrachteten Fälle kann die folgende periodische Fläche dienen, deren Meridiankurve in Fig. 3 angegeben ist.

$$y = (\beta^2 - \alpha^2) \operatorname{arctang} \sqrt{\frac{r^2 - \alpha^2}{\beta^2 - r^2}} - \sqrt{r^2 - \alpha^2 \,.\, \beta^2 - r^2} = f(r),$$

wo α den Radius des Rückkehrkantenkreises und β den des Aequators bedeutet, und die ich wähle, weil sie später noch von Interesse sein wird.

Aus dieser Gleichung ergibt sich:

$$f' = \sqrt{2} \sqrt{\frac{r^2 - \alpha^2}{\beta^2 - r^2}}.$$

und hiemit als Gleichung der Linien:

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \frac{r^2 - \gamma^2}{\sqrt{\beta^2 - r^2 \,.\, r^2 - \nu^2 \,.\, r^2 - \gamma^2}}; \quad \gamma^2 = 2\alpha^2 - \beta^2$$

Man sieht hieraus, dass $r = \alpha$ nicht als Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt auftritt. Setzt man ferner $\nu = \alpha$, so ergibt sich eine Linie, welche den Rückkehrkantenkreis

$r = \alpha$ berührt; und ist $\nu < \alpha$, so resultirt, analytisch betrachtet, eine Kurve, welche sich, wie die Funktion unter dem Integralzeichen unmittelbar zeigt, ausserhalb der Fläche die Rückkehrkante überschreitend bis $r = \nu$ fortsetzt, die Kante zum zweitenmal, aber in einem andern Punkte trifft, da φ gewachsen ist und in ν erst seine halbe Periode erreicht hat, jetzt den nächstliegenden Flächenteil betritt und auf diese Weise die ganze Fläche durchläuft. Geometrisch wird man jedoch nur das Stück als eine Linie auffassen, welches zwischen zwei aufeinanderfolgenden Rückkehrkanten liegt.

Um den zweiten Fall durch ein Beispiel zu erläutern, nehme ich die Fläche:

$$(r-a)^2 = by^3, \text{ (Fig. 4.)}$$

a ist die Abscisse des Rückkehrpunktes und b eine andere Constante. Man erhält:

$$y = \sqrt[3]{\frac{(r-a)^2}{b}}$$

$$\frac{dy}{dr} = f' = \frac{2}{3\sqrt[3]{b\,(r-a)}}$$

und hieraus die Gleichung der Linien:

$$\varphi = \frac{\nu}{3} \int_{r_0}^{r} \frac{dr \,.\, \left\{ 9\sqrt[3]{b^2 (r-a)^2} + 4 \right\}}{r \sqrt{(r^2 - \nu^2)} \,.\, \sqrt[3]{b^2 (r-a)^2} \,.\, \left(9\sqrt[3]{b^2 (r-a)^2} + 4 \right)}.$$

Zunächst ersieht man, dass a als Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt auftritt, und dass das Integral für alle Werthe von $r = \infty$ bis $r = o$ reell bleibt; also können wir Linien construiren, welche die Rückkehrkante überschreiten, um entweder an einem Grenzkreise $\nu < a$ umzukehren oder

die ganze Fläche zu durchlaufen. Ferner zeigt sich, dass, wenn $\nu = \alpha$ gesetzt wird, zwei Unstetigkeitspunkte zusammenfallen, und das Integral algebraisch unendlich wird, denn es ist:

$$\lim_{r=a} \left\{ \frac{(r-a)\chi(r)}{(r-a)^{\frac{7}{6}}} \right\} = \infty$$

wo $\chi(r)$ die Funktion bedeutet, welche übrig bleibt, wenn man aus dem Integral den Factor $\frac{1}{(r-a)^{\frac{7}{6}}}$ herausnimmt.

Es wird angezeigt sein, die in diesem § angeführten Resultate präcis in folgenden zwei Sätzen zusammenzufassen:

„Besitzt die Meridiankurve einer Rotationsfläche Rückkehrpunkte, und sind die Tangenten in ihnen nicht parallel zur Rotationsaxe, so sind die ihnen entsprechenden Kanten der Fläche als Grenzen aufzufassen, in welchen die geodaetischen Linien aufhören, um sich an einer andern Stelle einer solchen Kante wieder fortzusetzen. Ferner gibt es von jedem Punkt der Fläche aus eine Linie, welche die Rückkehrkante berührt.“ „Besitzt die Meridiankurve einer Rotationsfläche einen Rückkehrpunkt, dessen Tangente parallel der Rotationsaxe ist, so gibt es immer Linien, welche sich ohne Unterbrechung auch über die entsprechende Rückkehrkante hin fortsetzen, und von jedem Punkte der Fläche aus läuft eine, die sich der Kante asymptotisch nähert.“ Bei diesen Sätzen ist vorausgesetzt, dass der Rückkehrpunkt kein Maximum des Meridians sei.

§ 6.

Allgemeine Bestimmung der Enveloppen geodaetischer Linien auf Rotationsflächen.

Wir wenden uns jetzt zu der Hauptaufgabe vorliegender Arbeit, nämlich der Bestimmung der Enveloppen geodaetischer Linien.

Jacobi hat zuerst in seinen Vorlesungen über Dynamik (pag. 46) darauf aufmerksam gemacht, dass eine geodaetische Linie, die von einem bestimmten Punkte einer Fläche ausgeht, nicht immer in ihrer ganzen Ausdehnung die Eigenschaft besitzt, kürzeste Linie zu sein, sondern nach Erreichung einer festen Grenze diese Eigenschaft verliert. Um diese Grenze genauer zu bestimmen, stellte er folgenden Satz auf: „Wenn man von einem Punkte einer Oberfläche nach allen Richtungen kürzeste Linien zieht, so können zwei Fälle eintreten: zwei unendlich benachbarte kürzeste Linien laufen entweder fortwährend nebeneinander, ohne sich zu schneiden oder sie schneiden sich wiederum, und dann bildet die Continuität aller Durchschnittspunkte ihre einhüllende Curve. Im ersten Falle hören die kürzesten Linien nie auf, kürzeste zu sein, im zweiten sind sie es nur bis zum Berührungspunkte mit der einhüllenden Curve."

Es ist mithin von Interesse, zu untersuchen:

1) Ob alle geodaetischen Linien einer und derselben Fläche Enveloppen liefern, oder nicht?

2) Ob es Flächen gibt, auf welchen überhaupt keine Enveloppen existiren?

3) Auf welche Weise die Einhüllenden zu Stande kommen?

4) Was man über die Gestalt derselben anzugeben vermag?

Diese Fragen werden im Folgenden für Rotationsflächen allgemein beantwortet. Nr. 2) betreffend sei noch sogleich erwähnt, dass Jacobi (loco cit.) einen Satz aufstellte, welcher lautet: „Auf allen concav-convexen Flächen schneiden sich zwei unendlich benachbarte kürzeste Linien nicht und sind daher in ihrer ganzen Ausdehnung kürzeste Linien." Einen Beweis hiefür gab er nicht. Jedoch hat Christoffel den Beweis geliefert in einem Aufsatze: „Allgemeine Theorie der geodaetischen Dreiecke" betitelt, welcher in den Berliner Academieberichten 1868 abgedruckt ist.

Dessenungeachtet werde ich in den vorliegenden Untersuchungen auf diesen Satz zurückkommen, da er in inniger Beziehung zu andern Sätzen steht, die später entwickelt werden.

Wir haben nun zunächst zu zeigen, wie sich die Enveloppen der geodaetischen Linien auf Rotationsflächen allgemein durch Gleichungen repräsentiren lassen. Dazu dient uns wieder Gleichung I § 1. Dieselbe enthält die Integrationsconstante ν. Erteilt man letzterer irgend einen bestimmten Wert, so erhält man eine geodaetische Linie, die in einem festen Punkte A jenes Kreises beginnt, dessen Radius r_0 die untere Grenze unseres Integrales ist, weil ja für $r = r_0$ $\varphi = o$ wird. Lässt man jetzt ν variiren, indem man ihm andere und andere Werte beilegt, so erhält man einen ganzen Büschel geodaetischer Linien, die offenbar alle durch Punkt A gehen, und deren Durchschnittspunkte, wenn solche vorhanden sind, die Enveloppe bilden.

Die Bedingungsgleichung für die Einhüllende wird sich also ergeben, wenn wir Gleichung I nach ν differentiiren und den erhaltenen Ausdruck mit Null vergleichen. Die einfache Rechnung liefert:

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \int_{r_0}^{r} \frac{d(r^2)\sqrt{1+f'^2}}{r^2-\nu^2.\sqrt{r^2-\nu^2}} = o \quad \ldots\ldots \quad II.$$

Wir wollen dieses Integral künftig mit J bezeichnen, dann repräsentiren die Gleichungen I und II, d. h.:

$$\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{dr}{r} \sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}} \quad \text{und} \quad J = o$$

die gesuchte Enveloppe.

Denn, gibt man ein bestimmtes ν, so lässt sich der zugehörige Wert von r aus $J = o$ finden und dieser als obere Grenze des Integrales I gesetzt liefert den entsprechenden Winkel φ.

§ 7.

Aufstellung eines allgemeinen Satzes über geodaetische Linien, die zu Enveloppen Anlass geben.

Um die erste Frage des vorigen § zu beantworten, stelle ich folgenden Satz auf:

„Diejenigen geodaetischen Linien einer beliebigen Rotationsfläche, die sich zwischen zwei festen Grenzkreisen bewegen, besitzen immer Enveloppen, jene hingegen, welche sich, ohne an einer Grenze umzukehren, über die ganze Fläche erstrecken, besitzen keine. (Punkte sind dabei als Enveloppen mitzurechnen.)“

Dieser Satz zerfällt in zwei Teile, die wir einzeln beweisen werden. Die hiezu verwendete Methode wird uns zu weiteren Sätzen Anlass geben.

Es sei $r = \alpha$ der Radius des Aequators, $r = \beta$ der des kleinsten Parallelkreises der Fläche. Verläuft die geodaetische Linie zwischen zwei festen Grenzen $r = \nu$, so heisst dies analytisch r bewegt sich im Integrale I. zwischen $r = r_0$ und $r = \nu$ und wird dabei den grössten Kreis überschreiten. Dieselben Werte durchläuft es aber auch im Integrale II., und da ein jeder Wert von r, der einem Punkte der

Enveloppe entspricht, dieses letztere Integral J zu Null machen muss, so haben wir offenbar jene Werte von r zu bestimmen, die reellen Nullpunkten des Integrales J entsprechen. Zu diesem Zwecke schreiben wir J in folgenden zwei Formen:

$$1) \quad \ldots\ldots\ldots \quad J = \tfrac{1}{2}\int_{r_0}^{r} d(r^2)\sqrt{\frac{1+f'^2}{(r^2-\nu^2)^3}};$$

$$2) \quad J = \tfrac{1}{2}\int_{r_0}^{r} d\left(\frac{-2}{\sqrt{r^2-\nu^2}}\right)\sqrt{1+f'^2} = -\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}}+\sqrt{\frac{1+f_0'^2}{r_0^2-\nu^2}}$$

$$+\int_{r_0}^{r}\frac{f'\,f''\,dr}{\sqrt{r^2-\nu^2}\,.\,\sqrt{1+f'^2}};$$

Dabei bedeutet f_0' jenen Wert, welchen f' annimmt, wenn man r_0 für r setzt. Ferner construiren wir für die Funktion unter dem Integralzeichen von 1 die Riemann'sche Fläche. Es interessirt uns jedoch nur jener Teil derselben, welcher in der Nähe der Punkte α, r_0 und ν liegt. Setzen wir nun zunächst voraus α sei ein Unstetigkeits- und Verzweigungspunkt des Integrales, was er nach frühern Betrachtungen immer sein wird, wenn er nicht einer Rückkehrkante entspricht, so haben wir von ihm aus nach dem zunächst folgenden Verzweigungspunkte, er heisse γ, einen Verzweigungsschnitt zu legen, desgleichen vom Verzweigungspunkte $+\nu$ nach dem unmittelbar vorhergehenden Punkte β, dann hängen in $(\gamma\,\alpha)$ und $(\nu\,\beta)$ zwei Blätter der Fläche zusammen. Von α bis ν ziehen wir jetzt den Querschnitt Q_1, der teilweise im ersten, teilweise im zweiten Blatte verläuft*)

*) In der Figur sind jene Teile der Querschnitte ausgezogen, welche im obern positiven Blatte verlaufen, die im untern, negativen Blatte, punktirt.

(Fig. 5) und von ν bis β den Querschnitt Q_2, welcher sich vollständig im obern positiven Blatte befindet; r_0 liegt dann auf der geraden Verbindungslinie von α und ν; und da es für jede geodaetische Linie einen andern Wert hat, so kann es sowol in α als in β als zwischen diesen Punkten liegen. Im Punkte $r = \nu$ wird das Integral von der Ordnung $\frac{3}{2}$ unendlich. Man hat nämlich:

$$\lim. \left\{ \frac{r-\nu \,.\, \sqrt{1+f'^2}}{(r^2-\nu^2)^{\frac{3}{2}}} \right\}_{r=\nu} = \infty$$

und es ist bekannt, dass in diesem Falle $r = \nu$ nicht eigens durch einen mit Q_2 verbundenen Kreis ausgeschlossen zu werden braucht.

Betrachtet man weiter Gleichung 2), so erkennt man durch Anwendung der schon oft gebrauchten Kriterien, dass das Integral

$$\int_{r_0}^{r} \frac{f' f'' \, dr}{\sqrt{(r^2-\nu^2)(1+f'^2)}}$$

im Punkte $r = \nu$ endlich bleibt, also hängt das Unendlichwerden von J im Punkte ν nur von der Funktion $-\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}}$ ab. Diese ändert aber für $r = \nu$ ihr Zeichen, denn ν ist für sie ein einfacher Verzweigungspunkt, bei dessen Umgehung die Funktion ihr Zeichen umkehrt. Also haben wir das wichtige Resultat erhalten: unser Integral J springt im Punkte $r = \nu$ von $+\infty$ auf $-\infty$ über.

Nun kann man r zwei Wege beschreiben lassen; entweder von r_0 über α nach ν und wieder zurück, oder von r_0 nach ν und über α nach r_0 zurück. Auf dem ersten Wege beginnt J in r_0 mit dem Werte Null und langt mit einem festen Werte in α an, mit dem es dann im untern Blatte weitergeht, um in dem kritischen Punkte ν positiv unendlich zu werden und auf $-\infty$ überzuspringen. Zu gleicher Zeit überschreiten wir aber auch den Querschnitt Q_2 und zwar von der negativen zur positiven Seite derselben übergehend, und somit langt jetzt das Integral mit einem positiven oder negativen Periodicitätsmodul J_0 in r_0 an, je nachdem die Periode des Integrals positiv oder negativ ist, um seine zweite Periode zu beginnen. Ist J_0 positiv, so muss das Integral, bevor es nach r_0 gelangt, durch Null hindurch gegangen sein, da es in $r = \nu$ negativ unendlich war; also ist in diesem Falle ein Nullpunkt vorhanden und tritt auf, bevor das Integral seine Periode erreicht hat. Ist hingegen J_0 negativ, so geht J mit diesem negativen Werte abermals von r_0 über α, um in ν wieder positiv unendlich zu werden; also muss jetzt wieder ein Nullpunkt vorhanden sein und diesmal zwischen r_0 und α oder α und ν liegen.

Lässt man r den zweiten Weg von r_0 über ν nach α und r_0 zurück beschreiben, so vertauschen sich natürlich die Zeichen von J_0, da man jetzt den Querschnitt Q_2 in entgegengesetzter Richtung durchschneidet. J geht von r_0 mit dem Werte Null aus, langt in ν mit $-\infty$ an, springt auf $+\infty$ über und muss, wenn J_0 negativ ist, zwischen ν und α oder α und r_0 einen Nullpunkt besitzen, da es in r_0 mit dem Werte $-J_0$ anlangt; ist hingegen J_0 positiv, so liegt der gesuchte Nullpunkt zwischen r_0 und ν, also nach Vollendung der Periode. Somit gibt es in jedem Falle reelle Nullpunkte, es mag der Periodicitätsmodul positiv oder negativ sein, d. h. es existiren Enveloppen. Auf die

Bedeutung der zweierlei Wege des Integrales werde ich bei Besprechung der Gestalten der Enveloppen noch weiter zurück kommen, nur die geometrische Bedeutung der Periode des Integrales sei gleich hier näher auseinandergesetzt, da diese für die Einsicht in das Folgende wesentlich ist. Gibt man irgend einen bestimmten Wert von ν und lässt das zugehörige Integral J von dem Werte $r = r_0$ ausgehen, so geht die dem nämlichen ν entsprechende geodaetische Linie von einem Punkte des Parallelkreises $r = r_0$ aus, und J sowol, als das Integral der geodaetischen Linien vollenden ihre Perioden, wenn r wiederum den Ausgangswert und zwar auf demselben Blatte der Riemann'schen Fläche erhalten hat; dann ist aber die Linie von ihrem Ausgangspunkte den Aequator schneidend zu jenem Parallelkreis gelangt, der den Radius r_0 besitzt und auf der andern Seite des Aequators liegt. Rückt der Ausgangspunkt der Linien auf den grössten Kreis, so fallen die beiden sich entsprechenden Kreise mit dem Radius r_0 in ersteren zusammen, und die Integrale vollenden daher ihre Perioden, sobald die Linie den Aequator abermals schneidet.

Dem zweiten Teil des aufgestellten Satzes entspricht als analytische Bedingung, dass $\nu < \beta$ ist. Denn, wenn dieses der Fall, so gibt es keinen Grenzkreis $r = \nu$ auf der Fläche, sondern derselbe liegt ausserhalb, und die Linien sind durch ihn nicht mehr in ihrem Laufe gehindert, da r jetzt alle Werte von α bis β annehmen kann. Der Punkt $r = \nu$ liegt also jetzt nicht zwischen r_0 und β, und mithin kann J auf seinem Wege zwischen diesen Grenzen nicht unendlich werden, wenn wir den Fall ausschliessen, in welchem β ein Unendlichkeitspunkt des Integrales ist, den wir später in's Auge fassen werden. J ändert folglich sein Zeichen bei Umgehung des Punktes β nicht, da allerdings die Funktion unter dem Integralzeichen aber gleichzeitig auch „dr" sein Zeichen wechselt; also wächst das Integral

immer fort und kann somit niemals zu Null werden. In diesem Falle existiren also keine reellen Nullpunkte für J, d. h. es gibt keine reellen Werte von r, welche unsere Bedingungsgleichung befriedigen, keine Enveloppen der geodaetischen Linien.

Falls nun aber J für $r = \beta$ unendlich wird, so wird auch φ unendlich, und wir haben daher den in § 3 behandelten Fall, wo der kleinste Kreis $r = \beta$ selbst im Unendlichen liegt. In der That: der Punkt $r = \beta$ erscheint in dem Integrale I der kürzesten Linien genau in derselben Weise, wie in der Bedingungsgleichung II, und in Folge davon zieht das Unendlichwerden von J das Unendlichwerden von φ nach sich. Es ist also jetzt zu untersuchen, ob J im Punkte $r = \beta$ sein Zeichen umkehrt, oder nicht; ist das erstere der Fall, so gibt es nach dem Obigen reelle Nullpunkte, tritt hingegen das letztere ein, so existiren deren keine. Aus den Formeln des § 3 sieht man aber, dass $\sqrt{1+f'^2}$ und f' genau in derselben Weise für $r = \beta$ unendlich werden, nämlich wie der Ausdruck $\frac{c}{(r-\beta)^{\frac{n}{2}}}$, und da, wie dort bewiesen, die Meridiankurven der Flächen, bei welchen allein der fragliche Fall eintreten kann, im Unendlichen einen Wendepunkt besitzen, d. h. $y = \int f'(r)\,dr$ von $+\infty$ auf $-\infty$ überspringt, so muss auch J in diesem Punkte sein Zeichen ändern, d. h. reelle Nullpunkte besitzen, die jedoch erst nach Durchschreitung des Unendlichen auftreten können. Fasst man also zwei Züge einer geodaetischen Linie, die im Unendlichen zusammenhängen, als einen einzigen Zug auf, was hiernach analytisch gerechtfertigt ist, so kann man den Satz aussprechen: „Bei Flächen, deren kleinster Kreis im Unendlichen liegt, und deren Meridiankurven daselbst einen Wende-

punkt haben, besitzen auch jene Linien Enveloppen, welche diesen kleinsten Kreis schneiden, jedoch sind sie in ihrer ganzen Ausdehnung kürzeste Linien, da die Einhüllenden erst nach Durchlaufung des Unendlichen beginnen."

Die Folgerungen aus dem am Anfang dieses § aufgestellten Satze, sowie die Beispiele zu ihm und dem zuletzt angeführten sollen im folgenden § zusammengestellt werden.

§ 8.

Folgerungen aus den Sätzen des vorausgehenden §.

Nach dem in § 4 ausgesprochenen Satze gibt es auf Flächen, welche die Rotationsaxe schneiden oder im Unendlichen berühren, nur eine einzige Linie, die den Schnitt oder Berührungspunkt passirt, nämlich den Meridian, also folgt aus dem vorhergehenden § 7, dass es auf solchen Flächen nur Linien geben kann, welche Enveloppen besitzen, allerdings unter der Bedingung, dass das Unendliche nicht als Grenze einer geodaetischen Linie angesehen wird. Besonders hervorzuheben sind dabei die Flächen positiven Krümmungsmasses in dem von Gauss aufgestellten Sinne, wie das verlängerte und abgeplattete Rotationsellipsoid, das Paraboloid und andere. Fällt die obige Bedingung betreffs des Unendlichen hinweg, so sind auf Flächen, wie dem Paraboloide, keine Enveloppen möglich. Wir wollen das abgeplattete Rotationsellipsoid als Beispiel näher betrachten.

Die Gleichung des Sphäroids sei:

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{a^2}=1. \text{ und } x^2+z^2=r^2,$$

dann ist

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-r^2}=f(r),$$

und man findet als Gleichung der geodaetischen Linien, die wir der Einfachheit wegen vom Aequator ausgehen lassen,

$$1) \ldots \varphi = \nu \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \int_a^r \frac{dr}{r} \frac{r^2-\lambda^2}{\sqrt{(r^2-\lambda^2)(r^2-a^2)(r^2-\nu^2)}};$$

$$\lambda^2 = \frac{a^4}{a^2-b^2} > a^2$$

Da nun λ^2 immer grösser als a^2 ist, und r nie grösser als a werden kann, so ist $r^2 - \lambda^2$ stets negativ und desgleichen $r^2 - a^2$. Wenn also φ reell sein soll, so muss $r^2 - \nu^2$ positiv d. h. $\nu^2 < a^2 < \lambda^2$ sein, jedoch nach § 3 höchstens den Wert Null annehmen können.

Die Bedingungsgleichung für die Existenz von Enveloppen ist dann:

$$2) \ldots o = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \int_a^r \frac{(r^2-\lambda^2)\, d(r^2)}{r \cdot r^2-\nu^2 \cdot \sqrt{r^2-\lambda^2 \cdot r^2-a^2 \cdot r^2 \quad \nu^2}}$$

Um diese beiden Integrale 1) und 2) zu normiren, setzen wir

$$r^2 = \frac{a^2(\lambda^2-\nu^2) - \lambda^2(a^2-\nu^2)}{\lambda^2-\nu^2-(a^2-\nu^2)z^2}, \text{ dann wird } k^2 = \frac{a^2-\nu^2}{\lambda^2-\nu^2},$$

$$\varphi = c \int_o^z \frac{dz}{(1-nz^2)\sqrt{1-z^2 \cdot 1-k^2z^2}};$$

$$c = \frac{\nu b^2}{a\sqrt{a^4-\nu^2(a^2-b^2)}}, \qquad n = -\frac{\lambda^2}{a^2} \cdot k^2$$

$$o = \int_o^z \frac{dz}{1-z^2 \cdot \sqrt{1-z^2 \cdot 1-k^2z^2}}.$$

Man erkennt augenblicklich, dass das letztere Integral für $z = 1$ d. h. für $r = \nu$ unendlich wird und, schreibt man es in der Form:

$$o = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}} - k^2 \int_o^z \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}},$$

so zeigt sich, dass bei Umgehung des Punktes $z = 1$, die Funktion $\frac{z}{\sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}}$ ihr Zeichen ändert, während $k^2 \int_o^z \frac{z^2 dz}{\sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}}$ zwischen den Grenzen o und 1 endlich bleibt, da es, wie man leicht durch Anwendung der bekannten Kriterien sieht, nur in den Punkten $z = \infty$ logarithmisch- und in $z = \frac{1}{k}$ von der Ordnung $\frac{3}{2}$ algebraisch unendlich wird. Es existiren also in jedem Falle relle Nullpunkte des Integrals, und die Linien besitzen somit eine Enveloppe.

Auf Flächen, die teilweise concav, teilweise convex gegen die Rotationsaxe gekrümmt sind und diese nicht schneiden, gibt es nach § 2 immer solche Linien, die sich zwischen zwei bestimmten Grenzkreisen bewegen und diese besitzen nach unserem Satze Enveloppen. Es existiren aber auch immer Linien, welche die ganze Fläche durchlaufen und somit keine gemeinsame Einhüllende haben.

Als Beispiel hiefür wollen wir die Fläche constanter mittlerer Krümmung betrachten, auf die wir auch später wieder zurückkommen werden.

Die Differentialgleichung wurde von A. Beer in der Form aufgestellt:

3) . . . . $\frac{dy}{dr} = \frac{r^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{\alpha_1^2 - r^2 \,.\, r^2 - \alpha_2^2}} = f'$,

wo α_2 der Radius des Aequators, α_1 der des Kehlkreises ist. Die Meridiankurve der für das Zeichen plus resultirenden Fläche hat die in Fig. 10 gegebene Gestalt. Als Gleichung einer von einem Punkte des Aequators ausgehenden Linie ergibt sich dann:

4) . . . . . $\varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{\alpha_2 + \alpha_1 \,.\, dr}{\sqrt{\alpha_2^2 - r^2 \,.\, r^2 - \nu^2 \,.\, r^2 - \alpha_1^2}}$

und als Bedingungsgleichung für die Existenz von Enveloppen

5) . . . . $o = \int_{r_0}^{r} \frac{r^2 \, dr}{r^2 - \nu^2 \,.\, \sqrt{\alpha_2^2 - r^2 \,.\, r^2 - \nu^2 \,.\, r^2 - \alpha_1^2}}$.

Aus der ersten dieser beiden Gleichungen erkennt man augenblicklich, dass dem § 2 entsprechend beide Gattungen von Linien existiren müssen. Bei jenen, für welche $\nu > \alpha_1$ ist, erhält man nach Normirung der Integrale durch die Substitution $r^2 = \frac{\alpha_2^2 \nu^2}{\nu^2 + (\alpha_2^2 - \nu^2) z^2}$. wieder genau dieselbe Bedingungsgleichung wie im Falle des Sphaeroids, welche die Existenz der Enveloppen für diese Liniengattung beweist. Bei der andern Gattung von kürzesten Linien hingegen, die für $\nu < \alpha_1$ erscheint, setzen wir

$$r^2 = \frac{\alpha_2^2 \alpha_1^2}{\alpha_1^2 + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) z^2},$$

dann wird: $k^2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2 - \nu^2} \,.\, \frac{\nu^2}{\alpha_1^2}$, und erhalten:

$$\varphi = \tau \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-k^2z^2}}; \quad \tau = \sqrt{\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}}.$$

und

$$o = \int_0^z \frac{dz}{1-k^2z^2.\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-k^2z^2}}$$

Das letzte Integral ist in der That für $z = 1$ endlich, denn

$$\lim. \left\{ \frac{1-z}{1-k^2z^2.\sqrt{1-z^2}.\sqrt{1-k^2z^2}} \right\}_{z=1} = o,$$

und es kann somit nach dem vorigen § von reellen Nullpunkten in den hier in Betracht kommenden Grenzen keine Rede sein, d. h. jene Linien, welche die ganze Fläche schraubenförmig umwinden, besitzen keine Enveloppen und sind somit in ihrer ganzen Ausdehnung kürzeste Linien, wie es der allgemeine Satz verlangt. Genau das nämliche ergibt sich, wenn wir in Gleichung 3) d. § das negative Zeichen benützen. Die Meridiankurve besitzt dann einen Doppelpunkt, der in der Gleichung der geodaetischen Linien, wie man sieht, nicht auftritt, und somit den Verlauf der Enveloppen ebenfalls nicht beeinflusst. Es ist dies, nebenbei bemerkt, überhaupt allgemein der Fall; denn ein solcher Punkt kann dem Factor $\sqrt{1+f'^2}$ nur dann einen unendlichen Wert erteilen, wenn die Tangente in ihm parallel zur Rotationsaxe ist, was im Allgemeinen nicht eintritt.

Für Flächen und Rückkehrkanten gibt unser Satz in Verbindung mit den Schlüssen des § 5 offenbar folgende Resultate. Betrachtet man die geodaetischen Linien von rein analytischem Standpunkte als durch die Gleichung I definirt, so existiren, da die Rückkehrkanten dann in keinem

Falle als Grenzen der Linien anzusehen sind, stets Enveloppen für jene Kurven, die sich zwischen zwei festen Grenzkreisen periodisch bewegen; betrachtet man sie hingegen als durch die Rückkehrkanten abgeschlossen, so kann, wenn die Grenzkreise kleiner als die Rückkehrkantenkreise und diese nicht zugleich die grössten Kreise der Fläche sind, von Enveloppen jener Linien nicht die Rede sein.

Bei Flächen, welche in der Nähe der Rückkehrkanten negativ gekrümmt sind, d. h. deren Hauptkrümmungsradien entgegengesetztes Zeichen haben, lässt sich die Frage mit den bisherigen Mitteln nicht endgültig lösen. Dieser Fall bedarf daher noch einer nähern Erörterung, die er im folgenden § finden wird.

§ 9.

Enveloppen auf negativ gekrümmten Flächen.

In diesem § wird die zweite der in § 6 aufgestellten Fragen ihre Entscheidung finden. Fassen wir zuerst eine Fläche in's Auge, welche nur concav-convexe d. h. negative Krümmung besitzt, so sind nur zwei wesentlich verschiedene Gestalten der Meridiankurve einer solchen Fläche möglich. Entweder erstreckt sich die Kurve nach zwei Seiten in's Unendliche, wie der Meridian eines einschaligen Hyperboloids, oder sie besitzt Rückkehrpunkte, deren Tangenten senkrecht zur Rotationsaxe sind, wie die Flächen constanter negativer Krümmung. Statt eines Rückkehrpunktes kann natürlich auch ein Schnittpunkt mit der Rotationsaxe oder ein Berührungspunkt im Unendlichen eintreten. Ich stelle nun bezüglich dieser Flächen einen dem von Jacobi angegebenen und in § 6 angeführten Satze analogen auf, welcher lautet:

„Die geodaetischen Linien auf Rotationsflächen concav-convexer Krümmung besitzen keine Einhüllenden, wenn man das Unendlich-

ferne oder die Rückkehrkanten solcher Flächen als Grenzen betrachtet, in welchen die Linien aufhören. Denkt man sich dieselben hingegen durch das Unendliche oder über die Rückkehrkanten in einem Zuge fortgesetzt und auf der Fläche wieder erscheinend, wogegen analytisch kein Hinderniss besteht, so kann man auch hier von Enveloppen sprechen."

Zum Beweise dieses Satzes haben wir folgendes zu berücksichtigen. Bei allen Flächen rein negativen Krümmungsmasses kann als grösster Parallelkreis der unendlich ferne betrachtet d. h. $\alpha = \infty$ gesetzt werden. Diess ist bei Flächen, deren Meridiankurve in's Unendliche geht, wie beim Hyperboloid, für sich klar und hat bei Flächen mit Rückkehrkanten seinen Grund darin, dass die den Kanten entsprechenden Werte von r nicht als Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkte im Integral auftreten.*) Da wir nun in § 6 gesehen haben, dass, wenn wir J von r_0 über α (in unserm Falle $\alpha = \infty$) und ν wieder nach r_0 zurückführen, und der Periodicitätsmodul J_0 negativ ist, der Nullpunkt von J erst nach Vollendung der Periode auftritt, so wird nur J_0 für unsere Flächengattung aufzustellen und zu beweisen sein, dass es in jedem Falle das negative Zeichen besitzt, damit unser Satz in Kraft trete. Denn wenn die Nullpunkte erst nach Vollendung der Periode auftreten, so muss die geodaetische Linie das Unendliche durchlaufen haben, bevor sie ihre Enveloppe berühren kann.

Wir haben nur zur Bestimmung von J_0 von $r = \infty$

*) Es ist immerhin denkbar, dass bei solchen Flächen ausserhalb der Rückkehrkante noch ein Unstetigkeitspunkt γ des Integrales liegt, ähnlich, wie bei der positiv gekrümmten Fläche in § 5. Beispiel I. Dann haben wir aber nur in unserer Betrachtung überall statt ∞ γ zu setzen und ändern hiedurch die Resultate nicht.

bis $r = \nu$ auf dem negativen, von $r = \nu$ bis $r = \infty$ auf dem positiven Blatte der Riemann'schen Fläche Fig. 5 zu integriren, und da hiebei in

$$J = \left\{ -\sqrt{\frac{1+f'^2}{r^2-\nu^2}} \right\}_{\infty}^{r} + \int_{\infty}^{\nu} \frac{f' f'' dr}{\sqrt{r^2-\nu^2 . 1+f'^2}}$$

die Funktion vor dem Integrale hinwegfällt, so ist der Periodicitätsmodul ausgedrückt durch:

$$J_0 = -\int_{\infty}^{\nu} \frac{f' f'' dr}{\sqrt{r^2-\nu^2 . 1+f'^2}} + \int_{\nu}^{\infty} \frac{f' f'' dr}{\sqrt{r^2-\nu^2 . 1+f'^2}},$$

da die Wurzel im untern Blatte das negative, im obern Blatte das positive Vorzeichen besitzt. Also ist

$$J_0 = 2\int_{\nu}^{\infty} \frac{f' f'' dr}{\sqrt{r^2-\nu^2 . 1+f'^2}}$$

Dass nun J_0 für unsere Flächen stets das negative Zeichen besitzt, ergibt sich, indem wir in die Funktion unter dem Integralzeichen das Gauss'sche Krümmungsmass einführen. Bei Rotationsflächen sind bekanntlich die beiden Hauptkrümmungsradien in irgend einem Punkte einer Fläche nichts anderes als die Normale N und der Krümmungshalbmesser R des durch diesen Punkt gehenden Meridians. Diese drücken sich aber wie folgt aus:

$$N = \frac{r\sqrt{1+f'^2}}{f'}; \quad R = \frac{\sqrt{(1+f'^2)^3}}{f''}.$$

Hieraus findet man den Ausdruck des Krümmungsmasses

$$K = \frac{f' f''}{r(1+f'^2)^2},$$

welcher in die Gleichung für J_0 eingeführt derselben die Gestalt gibt:

$$J_0 = 2 \int_{\nu}^{\infty} \frac{Kr.(1+f'^2)^{\frac{3}{2}} dr}{(r^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Nun aber muss K immer negativ sein, während r innerhalb der Integrationsgrenzen einen positiven Wert hat, also ist J_0 für die fraglichen Flächen negativ, welchen Wert auch ν haben mag, und somit der aufgestellte Satz bewiesen.

Um die Sache zu erläutern, lassen wir den Ausgangspunkt der geodaetischen Linien auf den unendlich fernen Kreis rücken, dann wird $r_0 = \infty$. Das Integral J wird jetzt seine Periode erreicht haben, wen r von ∞ bis ν gegangen und von hier wieder bis ∞ zurückgekommen ist. Ist nun J_0 negativ, so heisst dies, die Berührungspunkte der Linien mit der Enveloppe können erst auftreten, wenn sie das Unendliche durchschreitend zum zweitenmale auf der Fläche erscheinen, oder mit andern Worten, in dem ersten Zuge der Linien vom Unendlichen herein, über den Grenzkreis ν bis wieder zum Unendlichen kann kein Berührungspunkt mit der Enveloppe liegen; also sind die geodaetischen Linien auf solchen Flächen in ihrer ganzen Ausdehnung kürzeste Linien.

Jetzt können wir auch die am Schlusse des § 8 aufgeworfene Frage nach den Enveloppen auf den Flächen lösen, die Rückkehrkanten besitzen und nur in der Nähe derselben concav-convexer Krümmung sind. Man erkennt nämlich aus dem Vorhergehenden, dass jene Linien, welche die Rückkehrkanten schneiden, und sich zwischen zwei zu beiden Seiten derselben befindlichen Grenzkreisen bewegen, geometrisch aufgefasst, niemals Enveloppen liefern werden.

Als Beispiel zu dem in diesem § aufgestellten Satze wollen wir eine Fläche betrachten, welche man erhält, wenn

man in der Differentialgleichung der Flächen constanter mittlerer Krümmung § 8, a) dem Radius des grössten Kreises α_2 einen unendlichen Wert erteilt. Diese Fläche ist dann das bekannte Catenoid, durch Rotation der Kettenlinie erzeugt.

Ihre Gleichung wird:

$$f' = \frac{dy}{dr} = \frac{\alpha_1}{\sqrt{r^2 - \alpha_1^2}},$$

wo α_1 der Radius des Kehlkreises der Fläche ist.

Die Gleichung der Linien, sowie die Bedingungsgleichung für die Existenz der Enveloppen gehen aus b) und c) d. § hervor und sind, den Ausgangspunkt auf dem grössten Kreis genommen,

$$\varphi = \nu \int_{\infty}^{r} \frac{dr}{\sqrt{r^2 - \nu^2 . r^2 - \alpha_1^2}}$$

$$o = \int_{\infty}^{r} \frac{r^2 dr}{r^2 - \nu^2 . \sqrt{r^2 - \nu^2 . r^2 - \alpha_1^2}} .$$

Transformirt man diese durch die Substitution $r = \frac{\nu}{z}$, so erhält man das Integral

$$o = -\frac{1}{\nu} \int_{o}^{z} \frac{dz}{1 - z^2 . \sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}} = J_z ,$$

wo $k = \frac{\alpha_1}{\nu}$ ist. Diese Gleichung stimmt genau mit der für das Sphäroid in § 8 erhaltenen Gleichung überein. Es existiren also analytisch betrachtet hier so gut wie dort

Enveloppen. Die Gleichung des Periodicitätsmoduls unseres Integrals nimmt aber folgende Gestalt an:

$$J_0 = -\frac{2}{\nu}\int_0^1 \frac{k^2 z^2\,dz}{\sqrt{(1-z^2).(1-k^2z^2)^3}},$$

und das negative Zeichen zeigt, dass die Berührungspunkte der Linien mit der Enveloppe erst auftreten können, nachdem jene ihre Periode vollendet, d. h. durch's Unendliche hindurchgegangen.

Um ein Beispiel für die zweite Hauptgattung der hier betrachteten Flächen zu haben, stelle ich folgende Flächengleichung auf:

$$y = \frac{2\alpha^2-(\alpha^2+\beta^2)\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\arcsin 2\,\frac{r^2-(\alpha^2+\beta^2)}{\alpha^2-\beta^2} + \sqrt{2(\alpha^2-r^2)(r^2-\beta^2)} = f(r).$$

Hier bedeutet wieder $r=\alpha$ den Radius des grössten Kreises, welcher eine sich periodisch wiederholende Rückkehrkante der Fläche ist, und $r=\beta$ den des Kehlkreises. Der Meridian hat beiläufig die in Fig. 6 gegebene Gestalt. Aus dieser Gleichung folgt:

$$f' = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\alpha^2-r^2}{r^2-\beta^2}}$$

und hieraus

$$\varphi = \frac{\nu}{\sqrt{2}}\int_{r_0}^{r} \frac{dr\,.\,r^2-2\beta^2+\alpha^2}{r\sqrt{r^2-\nu^2\,.\,r^2-\beta^2\,.\,r^2-2\beta^2+\alpha^2}}.$$

Man sieht also, dass r sich bewegen kann zwischen $r=\infty$ und $r=\nu$, und immer noch reelle Werte von φ resultiren, wenn auch die Werte von r nicht mehr der Fläche angehören. Geometrisch betrachtet wären also nur dann Enve-

loppen denkbar, wenn der Schnittpunkt zweier benachbarter Linien einträte, bevor sie den Kreis $r = \infty$ erreicht, den wir der einfachern Anschauung wegen wieder als Ausgangskreis der kürzesten Linien ansehen können. Die kürzesten Linien können sich aber nicht vor Vollendung der Periode schneiden, da J_0 wieder das negative Zeichen besitzt, wie die Gleichung

$$J_0 = -\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\sqrt{2}} \int_{\nu}^{\infty} \frac{2\,r\,dr}{\sqrt{r^2 - \nu^2 . r^2 - \beta^2 . r^2 - 2\beta^2 + \alpha^2}}$$

zeigt.

§ 10.

Sätze über die Lage der Berührungspunkte der Linien mit ihren Enveloppen.

Wir haben bereits in § 7 gesehen, dass das Auftreten der Schnittpunkte zweier benachbarter kürzester Linien vor oder nach Erreichung ihrer Periode sich durch das Vorzeichen des Moduls J_0 charakterisirt, und der letzte § zeigte, dass dieses Vorzeichen geradezu über die Existenz der Einhüllenden auf Flächen negativen Krümmungsmasses entscheidet. Es ist daher zu erwarten, dass die Betrachtung des Moduls auch bei verschieden = oder rein positiv gekrümmten Flächen zu interessanten Resultaten führen wird Ich werde deshalb die allgemeine Gleichung des Moduls für jene Flächen aufstellen, die durch $y = f(r^2)$ ausdrückbar sind, d. h. für alle jene, in deren Meridiankurven zwei entgegengesetzt gleichen Abscissenwerten nur ein Ordinatenwert zukommt. Dies ist bei weitem der allgemeinere Fall, und für ihn lässt sich der Modul in übersichtlicher Form angeben. Wir haben dann zu untersuchen, ob der-

selbe in jedem Falle positiv oder negativ ausfällt, oder ob er für verschiedene Flächengattungen das eine oder andere Zeichen besitzt.

Es sei der dem Aequator entsprechende Wert von r, α ein einfacher Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt der Funktion unter dem Integralzeichen von J, wie es immer sein muss, wenn er einem einfachen Maximum der Meridiankurve entspricht, und bezeichne Ω diejenige Funktion, welche übrig bleibt, wenn man aus $\sqrt{1+f'^2}\ (\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}$ herausnimmt, dann lautet unsere Bedingungsgleichung:

$$1) \ldots\ldots \quad J = \tfrac{1}{2} \int_{r_0}^{r} \frac{2\, r\, dr\, \Omega}{(\alpha^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \,.\, (r^2 - \nu^2)^{\frac{3}{2}}} = 0.$$

Um den Modul durch ein bestimmtes Integral auszudrücken, schreiben wir J in der Form:

$$J = -\frac{1}{\alpha^2 - \nu^2} \int_{r_0}^{r} \frac{-(\alpha^2 - \nu^2)\, r\, \Omega\, dr}{\sqrt{(\alpha^2 - r^2) \,.\, (r^2 - \nu^2)^3}},$$

oder:
$$J = -\frac{1}{\alpha^2 - \nu^2} \int_{r_0}^{r} d\left\{ \sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2 - \nu^2}} \right\} \Omega,$$

oder:

$$J = -\frac{1}{\alpha^2 - \nu^2} \left\{ \sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2 - \nu^2}}\, \Omega \right\}_{r_0}^{r} + \frac{1}{\alpha^2 - \nu^2} \int_{r_0}^{r} \sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2 - \nu^2}} \frac{d\Omega}{dr}\, dr,$$

dann ergibt sich genau wie im vorigen §:

$$J_0 = \frac{2}{\alpha^2 - \nu^2} \int_{\nu}^{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2 - \nu^2}} \frac{d\Omega}{dr} dr \quad \ldots\ldots 2)$$

Hieraus erkennt man nun sogleich, dass J_0 sowol das positive als das negative Zeichen besitzen und sogar den Wert Null annehmen kann, je nachdem $\frac{d\Omega}{dr}$ positiv, negativ, oder Null ist, also können wir den Satz aufstellen: „Unter den Rotationsflächen, die nicht in allen ihren Punkten negatives Krümmungsmass besitzen, gibt es solche, auf welchen die geodaetischen Linien ihre Enveloppen berühren, ehe eine Periode ihres Laufes vollendet, solche, auf welchen sie sich erst nach Erreichung der Periode schneiden, und endlich solche, auf denen sie sich mit Vollendung der Periode treffen. Bei letzteren laufen mithin alle von einem beliebigen Punkte der Fläche ausgehenden Linien wieder in einem Punkte zusammen: die Enveloppen reduciren sich auf Punkte."

Zur Illustration dieses Satzes lassen sich interessante Beispiele anführen.

Nehmen wir die Gleichung eines Rotationsellipsoides in der Form an:

$$\frac{y^2}{(ca)^2} + \frac{r^2}{a^2} = 1,$$

so ergibt sich für $c^2 > 1$ das verlängerte Rotationsellipsoid, für $c^2 < 1$ das Sphäroid und für $c^2 = 1$ die Kugel. Ich behaupte, dass für diese 3 Flächen der obige Satz in der Weise in Kraft tritt, dass die geodaetischen Linien auf dem verlängerten Ellipsoid sich vor und auf dem Sphäroid nach

Erreichung der Periode schneiden, während auf der zwischenliegenden Kugel, wie bekannt, die Enveloppen in Punkte übergehen, in denen sich die kürzesten Linien, d. h. die grössten Kreise, treffen Der Nachweis hiefür ergibt sich aus Gleichung 2).

Es ist nämlich $\Omega = r^2 - \alpha^2 . \sqrt{1+f'^2} = \sqrt{a^2 + (c^2-1)\, r^2}$,

also: $$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{(c^2-1)\, r}{\sqrt{a^2+(c^2-1)\, r^2}}.$$

Ist also $c^2 > 1$, so ist $\frac{d\Omega}{dr}$ positiv, und somit J_0 ebenfalls positiv. Ist $c^2 < 1$, so wird $\frac{d\Omega}{dr}$ negativ, und das Gleiche gilt von J_0; ist endlich $c^2 = 1$, so müssen $\frac{d\Omega}{dr}$ und J_0 verschwinden.

Denkt man sich also ein von einer Kugel nur wenig verschiedenes verlängertes Ellipsoid, so umhüllen die etwa von einem Punkte des grössten Kreises ausgehenden kürzesten Linien eine kleine Enveloppe in der Gegend, welche dem Ausgangspunkte diametral gegenüberliegt, indem sie sich vor Wiedererreichung des grössten Kreises schneiden. Nähert sich die Fläche immer mehr der Kugel, so wird die Einhüllende immer kleiner und kleiner und reducirt sich auf einen Punkt, sobald das Ellipsoid die Kugelgestalt erhalten. Degenerirt die Kugel in ein Sphäroid, so entsteht wieder eine Einhüllenden, welche allmälig an Grösse zunimmt, aber erst dann von den Linien berührt wird, wenn sie zum zweitenmal den Aequator durchschritten haben.

Ein anderes interessantes System dreier solcher Flächen, welches das vorhergehende als speciellen Fall in sich schliesst, liefert die Gleichung:

$$\frac{dy}{dr} = f' = c \sqrt{\frac{r^2-\beta^2}{\alpha^2-r^2}},$$

woselbst β der Radius des kleinsten, α der des grössten Parallelkreises der Fläche ist. Es sind dies periodische Flächen, deren Meridiankurven in $r = \beta$ Rückkehrpunkte besitzen, und zu denen auch die in § 5 angeführte Fläche gehört. Ist wieder $c^2 > 1$, so ergibt sich eine Fläche, welche in der Nähe des Aequators ziemlich flach gekrümmt ist, und deren geodaetische Linien sich vor Vollendung der Periode schneiden. Ist $c^2 = 1$, so erhält man die Flächen constanten positiven Krümmungsmasses, welche in der Nähe des Aequators bereits stärker gekrümmt sind, als die vorausgehenden, und deren kürzeste Linien sich in Punkten schneiden; ist endlich $c^2 < 1$, so erhält man eine noch stärker gekrümmte Fläche, deren geodaetische Linien sich nach Vollendung ihrer Periode treffen.

Das Krümmungsmass der genannten Flächen ist nämlich:

$$K = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)\, c^2}{[\alpha^2 - c^2 \beta^2 + (c^2 - 1)\, r^2]^2},$$

und ein Blick auf diese Formel beweist, was von der Krümmung dieser Flächen erwähnt wurde. Andererseits ist aber:

$$\Omega = \sqrt{\alpha^2 - c^2 \beta^2 + (c^2 - 1)\, r^2},$$

und somit:

$$\frac{d\Omega}{dr} = \frac{(c^2 - 1)\, r}{\sqrt{\alpha^2 - c^2 \beta^2 + (c^2 - 1)\, r^2}};$$

Dieser Ausdruck ist aber positiv, Null, oder negativ, je nachdem $c^2 > 1$, $c^2 = 1$, oder $c^2 < 1$ gewählt wird.

Man hat also allgemein das Resultat erhalten, dass sich alle kürzesten Linien auf den Rotationsflächen constanten positiven Krümmungsmasses, wenn sie von irgend einem Punkte ausgehen, wieder in einem Punkte vereinigen. Dieses Resultat war jedoch leicht vorherzusehen, da ja alle

Flächen constanter positiver Krümmung in eine Kugel biegbar sind, und hiebei die kürzesten Linien wieder in kürzeste Linien übergehen.

Dieses Resultat, sowie die Vergleichung der Formel für das Krümmungsmass mit dem Ausdrucke Ω legt die Vermutung nahe, dass die Flächen constanter positiver Krümmung überhaupt die einzigen der hier betrachteten Flächen seien, auf welchen sich die von irgend einem Punkte ausgehenden Linien wieder in einem Punkte vereinigen. Diese Vermutung bestätigt sich. Denn, statt des oben angeführten Ausdruckes für das Krümmungsmass, kann man setzen:

$$K = \frac{d}{dr}\left\{\frac{-1}{\sqrt{1+f'^2}}\right\} \cdot \frac{1}{r\sqrt{1+f'^2}} = -\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}\right\}^2 \cdot \frac{1}{2r},$$

und wenn man hier wieder statt $\sqrt{1+f'^2}$ Ω einführt, indem man $\sqrt{1+f'^2} = \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha^2 - r^2}}$ setzt, so kommt:

$$3) \quad \ldots\ldots\ldots \quad -2rK = \frac{d}{dr}\left\{\frac{\alpha^2 - r^2}{\Omega^2}\right\}.$$

Nun zeigt uns aber Gleichung 2) dieses §, dass, wenn $J_0 = o$ sein soll für jeden Wert von v, immer $\frac{d\Omega}{dr}$ verschwinden, d. h. Ω eine Constante sein muss. Setzen wir dies voraus, so geht die Gleichung des Krümmungsmasses, nach Ausführung der Differentiation, über in:

$$-\frac{2r}{\Omega^2} = -2rK,$$

d. h.

$$\Omega^2 = \frac{1}{K},$$

oder, da Ω eine Constante ist, muss auch K constant sein: die Fläche ist constanter Krümmung. Es ist somit nach den Voraussetzungen am Anfang dieses § für alle jene

Rotationsflächen, die nicht aus mehreren ineinanderliegenden Schalen bestehen, nachgewiesen, „dass Flächen, auf denen die Enveloppen geodaetischer Linien bei beliebiger Lage des Ausgangspunktes in Punkte übergehen, Flächen constanten positiven Krümmungsmasses sein müssen."

§ 11.

Die Gestalten der Enveloppen.

An die Erörterungen des vorausgehenden Paragraphen schliesst sich naturgemäss die Beantwortung der Frage nach den Gestalten der Enveloppen. Wir wollen sie, um die Darstellung durchsichtiger zu machen, an bestimmten Flächen beantworten, wobei sich von selbst allgemeine Gesichtspunkte ergeben werden.

1. Die Enveloppen auf dem Sphäroid.

Es befinde sich der Ausgangspunkt A der geodaetischen Linien auf dem Aequator, der natürlich selbst kürzeste Linie ist und die Fläche in zwei symmetrische Hälften teilt, welche beide durch das Büschel kürzester Linien einfach überdeckt werden. Es gibt somit zwei dem Kreise unendlich benachbarte Linien, welche zu beiden Seiten des durch A gehenden Meridians der Fläche Schnittpunkte mit dem Aequator besitzen. Diese beiden Punkte können als Anfangspunkte der Enveloppe betrachtet werden. Lässt man nun ν um $d\nu$ wachsen, so resultiren zwei Linien, deren jede zu andern Seiten des Aequators ihren Grenzkreis $r = \nu + d\nu$ berührt, den Aequator trifft und dann erst die ihr unendlich benachbarte Linie, welche für $r = \nu$ erhalten worden, schneidet. Das Gleiche gilt natürlich von allen folgenden Linien, und die Schnittpunkte, d. h. die Punkte der Enveloppe, entfernen sich daher nach derselben Richtung, aber

in verschiedenen Flächenhälften, immer mehr vom Aequator. Also besteht die ganze Enveloppe aus 4 Zügen (vergl. Fig. 7), von denen sich je zwei in einer Spitze am Aequator ansetzen. Jeder dieser Züge wird gebildet von allen den Linien, die in einem Quadranten der Fläche culminiren, d. h. ihren Grenzkreis $r = \nu$ treffen. Da nun jene Linien, die zwei nicht von derselben Spitze auslaufende Enveloppenzweige bilden, sich von zwei Seiten her dem durch A gehenden Meridiane nähern, so werden sich auch die beiden Zweige einem bestimmten Punkte des Meridians nähern, in welchem sie enden. In diesem Punkte besitzt dann die Enveloppe abermals eine Spitze; dasselbe gilt natürlich bezüglich des zu diesem Punkte auf der andern Flächenhälfte symmetrisch gelegenen. Die Enveloppe besteht somit aus einem vierspitzigen Zuge, der eine Gestalt ähnlich der Evolute der Ellipse besitzt, wie sie bereits von Jacobi l. c. angegeben worden. Die Lage der beiden auf dem Meridian befindlichen Spitzen erhält man, indem man in der Bedingungsgleichung $\nu = o$ setzt und den zugehörigen Wert von r berechnet. Dass diese Spitzen nicht in die beiden Pole der Fläche fallen, wie wol vermutet werden könnte, werde ich weiter unten nachweisen.

Verlegt man den Ausgangspunkt A der Linien in irgend einen Punkt eines Parallelkreises mit dem Radius $r = r_0$, so ändert sich im Wesentlichen an der Gestalt der Enveloppe nichts, wol aber an ihrer Lage. Statt des Aequators, in welchem früher die Anfangspunkte der Enveloppe lagen, tritt jetzt einerseits jener Kreis mit dem Radius r_0 auf, welcher sich auf der andern Seite des Aequators befindet, wo der Punkt A nicht liegt, andererseits jene geodaetische Linie, welche die beiden genannten Kreise berührt und zwar den erstern in ihrem Ausgangspunkte A. Sie scheidet die Fläche, wie oben der Aequator, in zwei Teile, die wieder von dem Meridian durch A in zwei symmetrische Hälften

getrennt werden, (vergl. Fig. 8). Alle Linien, welche von A ausgehend zuerst in einen der so entstandenen vier Quadranten eintreten, umhüllen einen Zweig der Enveloppe. Es sind also auch hier wieder vier Zweige vorhanden. Diese vier Zweige gehen zu zweien von zwei auf der genannten Linie gelegenen Punkten aus, in welchen die Enveloppe Spitzen besitzt, was aus dem Gesagten unmittelbar folgt, und enden abermals in zwei Spitzen, deren Lage auf dem Meridian man wieder dadurch erhält, dass man in $J = o$ $\nu = o$ setzt. Dass jedoch diese Spitzen nicht mit denen der oben bebetrachteten Enveloppe zusammenfallen können, ergibt sich einfach, wenn man bedenkt, dass diesmal J zwischen den Grenzen r_0 und r genommen ist, während es sich oben zwischen α und r bewegte.

Im Folgenden ist nun zu gleicher Zeit die Bewegung eines Punktes auf der geodaetischen Linie und die des zugehörigen r auf der Riemann'schen Fläche in's Auge gefasst.

Bewegt sich r von r_0 über ν und α nach r_0 zurück, (vergl. Fig. 5) so kann nach § 10 der Nullpunkt desselben nur zwischen r_0 und ν liegen. Also befindet sich der diesem Wege entsprechende Berührungspunkt des Meridians mit der Enveloppe, d. h. die eine Spitze, auf jenem Teil der Fläche, auf welchem der Ausgangspunkt A nicht liegt und zwar zwischen dem Parallelkreis mit dem Radius $r = r_0$ und dem Pole. Lässt man hingegen r von r_0 über α und ν nach r_0 zurückgehen, so muss der Berührungspunkt des Meridians, oder die zweite Spitze, zwischen dem letztgenannten Parallelkreis $r = r_0$ und dem andern Pole liegen. Nähert sich jetzt r_0 immer mehr diesem Pole, so nähert sich auch der auf der andern Flächenhälfte gelegene Parallelkreis r_0 dem andern Pole; die ganze Enveloppe zieht sich mithin immer mehr in der Nähe dieses zweiten Poles zusammen und geht in denselben über, sobald r_0 den Wert

Null erreicht hat, d. h. mit dem ersten Pole zusammengefallen ist (vgl. Fig. 8).

Aus der Art der Darstellung erkennt man, dass sie nicht blos für das Ellipsoid Gültigkeit besitzt, sondern für jede Fläche, welche die Rotationsaxe unter einem von Null verschiedenen Winkel schneidet, und deren Linien sich vor der Periode treffen.

Es wurde oben bemerkt, dass wenn der Ausgangspunkt der Linien auf dem Kreise $r = r_0$ liegt, jene beiden Spitzen, die nicht dem Meridiane angehören, auf der für $\nu = r_0$ erscheinenden Linie sich befinden, und zwar liegen dieselben in den beiden Berührungspunkten dieser Linie mit dem zweiten Kreise $r = r_0$. Denn fällt ν mit r_0 zusammen, so führen wir (Fig. 5) das Integral J von ν über α wieder nach ν zurück, von ν bis α bewegen wir uns im untern von α bis ν im obern Blatte der Riemann'schen Fläche, folglich sind die Werte von J einander entgegengesetzt gleich und heben sich im Punkte $r_0 = \nu$ auf, Punkt $r = \nu$ ist also ein Punkt der Enveloppe.

2. Die Enveloppen auf dem verlängerten Ellipsoid.

Das verlängerte Rotationsellipsoid können wir als den Typus jener Flächen auffassen, auf denen sich die kürzesten Linien vor Vollendung der Periode schneiden. Es sei wieder A der Ausgangspunkt der Linien und liege zunächst auf dem Aequator der Fläche. Derselbe ist, wie im vorigen Falle, bis zu einem bestimmten Punkte kürzeste Linie, und von hier beginnen, wie oben, zwei Zweige der Enveloppe; aber ein solcher Zweig verläuft jetzt im Gegensatze zum Sphäroid auf der nämlichen Hälfte der Fläche, in welche die ihn bildenden kürzesten Linien zuerst eintreten (vergl, Fig. 9). Ausser diesen kommen noch zwei andere congruente Zweige zustande, die sich in der nämlichen Entfernung

von dem Ausgangspunkte auf seiner andern Seite im Aequator ansetzen, so dass die Gestalt der ganzen Enveloppe ähnlich jener des abgeplatteten Ellipsoides wird. Genau das nämliche, was dort gesagt worden, gilt natürlich auch hier bezüglich jener Einhüllenden, welche nicht durch Linien erzeugt werden, die vom grössten Kreise ausgehen.

Betreffs der Construction der Figuren will ich noch bemerken, dass die Meridiane der Ellipsoide das Axenverhältniss 2 : 3 haben. Die Punkte, welche den Spitzen der Enveloppen entsprechen, sind sämtlich berechnet, zwischenliegende Punkte jedoch nicht aufgesucht. Die Rechnung ist nach einer Methode ausgeführt, die ich im folgenden § näher erörtern werde.

3. Enveloppen auf Flächen mit Kehlkreisen.

Die Gestalten der Enveloppen auf allen den Flächen, welche Kehlkreise besitzen, oder nicht vollständig positiv gekrümmt sind, sind wesentlich verschieden von den bereits betrachteten. Besitzt nämlich eine Fläche, wie etwa das Unduloid, dessen Axenschnitt Fig. 10 zeigt, Kehlkreise, d. h. sind die Tangenten in den Punkten dieser Kreise parallel zur Rotationsaxe, so ist der dem Radius eines solchen Kreises entsprechende Punkt $r = \beta$ auf der Riemann'schen Fläche Verzweigungs- und Unstetigkeitspunkt. Fällt mit ihm der Verzweigungspunkt ν zusammen, so geht der Periodicitätsmodul des Integrales J aus der Form:

$$J_0 = \frac{2}{\alpha^2 - \nu^2} \int_{\nu}^{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha^2 - r^2}{r^2 - \nu^2}} \frac{d\Omega}{dr} dr$$

über in:

$$J_0 = \frac{2}{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2-r^2}}{\sqrt{r^2-\beta^2}} \frac{d}{dr}\left\{\frac{\Psi}{\sqrt{r^2-\beta^2}}\right\} dr,$$

oder

$$J_0 = \frac{2}{(\alpha^2-\beta^2)^{\frac{3}{2}}} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2-r^2}\left\{(r^2-\beta^2)\frac{d\Psi}{dr} - r\Psi\right\}}{(r^2-\beta^2)^2} dr,$$

wo Ψ durch die Gleichung definirt ist: $\Psi = \Omega\sqrt{r^2-\beta^2}$.

Dieses Integral wird aber für $r = \beta$ quadratisch unendlich. Also sehen wir, dass jetzt der Modul einen unendlichen Wert erhält, wenn die Constante ν den Kehlkreis β erreicht.

Setzt man nun J_0 als negativ voraus und lässt wieder r von r_0 über α und ν nach r_0 zurück gehen, so kommt hier J mit dem Werte $-J_0$ an und, damit $J = o$ werde, wie es für einen Punkt der Enveloppe sein muss, muss das Integral abermals von r_0 über α erstreckt den Wert $+J_0$ erreichen; dann liefert jener Wert von r, welcher dem $+J_0$ entspricht, den gesuchten Nullpunkt, da $J = -J_0 + J_0 = o$ wird. Ist der Wert J_0 sehr gross, was, wie wir oben gesehen, dann der Fall ist, wenn ν dem β sehr nahe rückt, so muss J von r_0 zum zweitenmale ausgehend offenbar einen grössern Weg zurücklegen, bis der Nullpunkt eintritt, als wenn ν noch näher an r_0 liegt. Also ergibt sich das Resultat: Jemehr sich ν dem Werte β nähert, desto mehr rückt der Nullpunkt des Integrales J, d. h. der Berührungspunkt der geodaetischen Linie dem Punkte resp. Kreise $r = \beta$ nahe und fällt somit, wenn der Werth β erreicht ist, mit ihm zusammen; dabei ist die Lage von r_0 gleichgültig.

Also sehen wir, dass die beiden jenem Wege von r entsprechenden Zweige der Einhüllenden bei beliebiger Lage des Ausgangspunktes A dem einen Kehlkreise sich unendlich nähern. Genau auf dieselbe Weise ergibt sich der Beweis, wenn man J_0 als positiv voraussetzt. Dass dem einen Wege von r zwei Zweige der Enveloppe entsprechen, wird keines Nachweises bedürfen, da es sich genau auf die nämliche Art ergibt wie beim Sphäroid, wenn man statt des Meridians jene durch A gehenden Grenzlinien einführt, die sich den Kehlkreisen unendlich nähern.

Betrachtet man den zweiten Weg, welchen r durchlaufen kann, nämlich von r_0 über ν und α nach r_0 zurück, so ergibt sich genau auf dieselbe Art wie oben, dass wenn ν mit β zusammenfällt, $r = \nu = \beta$ eine Lösung unserer Bedingungsgleichung $J = 0$ ist.

Fassen wir das Gesagte zusammen, so folgt, dass alle Enveloppen auf Flächen, welche Kehlkreise besitzen, die zugleich die kleinsten Parallelkreise sind, sich diesen Kreisen asymptotisch nähern, gleichgültig, wo der Anfangspunkt der Linien gelegen. Die beiden andern Spitzen einer bestimmten Einhüllenden, die ebensogut auch hier wieder auftreten, wie beim Ellipsoid, sind, wie dort, durch den dem Ausgangskreise entsprechenden Parallelkreis und die ihn berührende geodaetische Linie in ihrer Lage bestimmt.

Es ist noch zu bemerken, dass unter die Kategorie der zuletzt betrachteten Flächen auch jene gehören, welche die Axe berühren, da für sie lediglich $\beta = 0$ zu setzen ist. Ferner mag noch angeführt werden, dass nach dem Vorausgehenden der Meridian bei den zuletzt behandelten Flächen in seiner ganzen Ausdehnung kürzeste Linie ist, da er gar nicht zu den Linien gehört, welche die Enveloppe bilden, bei geschlossenen Flächen dagegen diese Eigenschaft nur in einer bestimmten Länge besitzt, da ja in ihm die Spitzen der Enveloppen liegen.

§ 12.

Berechnung einer Enveloppe.

Zum Schlusse soll noch gezeigt werden, wie sich die Nullpunkte des Bedingungsintegrals in dem speciellen Falle wirklich finden lassen, in welchem das Integral J ein elliptisches wird.

Hiezu bedienen wir uns der Fläche constanter mittlerer Krümmung, bei welcher sich die geodaetischen Linien durch ein Integral erster Gattung ausdrücken.

Ihre Differentialgleichung war: § 8. 3)

$$\frac{dy}{dr} = \frac{r^2 \pm \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(\alpha_2^2 - r^2)(r^2 - \alpha_1^2)}};$$

Benützen wir das obere Zeichen, so ist die Gleichung der Horizontalprojection der Linien:

$$1a) \quad \varphi = \nu \int_{r_0}^{r} \frac{(\alpha_2 + \alpha_1)dr}{\sqrt{\alpha_2^2 - r^2 . r^2 - \nu^2 . r^2 - \alpha_1^2}},$$

und wenn man die im genannten § angegebene Substitution anwendet und einen Punkt des Aequators der Fläche als Ausgangspunkt wählt, so ergibt sich:

$$1b) \quad \varphi = \tau \int_{0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}};$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1}}; \quad k^2 = \frac{\alpha_2^2 - \nu^2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \cdot \frac{\alpha_1^2}{\nu^2}.$$

Als Bedingungsgleichung für die Existenz von Enveloppen hatten wir ferner erhalten:

$$2) \quad 0 = \int_{0}^{z} \frac{dz}{1 - z^2 . \sqrt{1 - z^2 . 1 - k^2 z^2}},$$

und es handelt sich jetzt darum, eine Methode anzugeben, mit welcher man jene Werte von z bestimmen kann, die dieser Bedingungsgleichung Genüge leisten.

Zu dem Zwecke führen wir die Funktion $z = \sin am\, u$ ein, dann geht Gleichung 1b) über in:

$$\frac{\varphi}{\tau} = u,$$

und 2) in: $$\int_0^u \frac{du}{\cos^2 am\, u} = o \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 3)$$

Definirt man nun als Normalform des Integrales zweiter Gattung

$$\int_0^u \triangle^2 am\, u\, du = E(u),$$

so kann man Gleichung 3) leicht in folgende umformen:

$$K'^2 . u + tangam\, u \triangle am\, u - E(u) = o \quad \ldots\ldots 4)$$

Diese Gleichung suchen wir durch eine Reihenentwicklung darzustellen.

Nach einer von Jacobi in den Fundamentis gegebenen Methode erhält man nämlich:

$$tangam\, u . \triangle am\, u =$$

$$\frac{\pi}{2K} \tan\frac{\pi u}{2K} + \frac{4\pi}{2K}\left\{\frac{q}{1-q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

und

$$E(u) = \frac{E}{K}\cdot u + \frac{4\pi}{2K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1-q^4}\sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\},$$

dabei ist

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2 . 1-k^2 z^2}}, \quad q = e^{-\frac{K'}{K}\pi}, \ldots \\ K' &= \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2 . 1-k'^2 z^2}}, \quad E = \int_0^K \triangle^2 am\, u\, du \ldots \end{aligned}\right\} 4a)$$

Führt man diese Werte in die Gleichung 4) ein, so ergibt sich:

$$5) \quad \ldots\ldots \quad o = (K k'^2 - E)\, u + \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2K} +$$

$$2\pi \left\{ \frac{q^2}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} - \frac{q^4}{1-q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} + \frac{q^6}{1-q^6} \sin \frac{3\pi u}{K} + \ldots \right\},$$

und diese Form ist zur Berechnung der Punkte einer Enveloppe vollständig geeignet. Denn, trennen wir den algebraischen und transscendenten Teil und setzen:

$$6) \quad \begin{cases} a) & y = (E - k'^2 K)\, u \\ b) & y = \frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2K} + 2\pi \left\{ \frac{q^2}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \ldots \right\}, \end{cases}$$

so können wir die erste dieser beiden Gleichungen als die einer Geraden auffassen, indem wir u als die Abscissen und y als die Ordinaten betrachten, während die zweite eine sich periodisch wiederholende Kurve darstellt, und haben dann nur die Werte von u zu bestimmen, welche den Durchschnittspunkten dieser Geraden mit der Kurve entsprechen.

Der Neigungswinkel ψ der geraden Linie gegen die u-Axe ist gegeben durch:

$$7) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{tang} \psi = (E - k'^2 K);$$

E bewegt sich zwischen den Grenzen 1 und $\frac{\pi}{2}$, während K von ∞ bis $\frac{\pi}{2}$ läuft, und zwar ist für $\nu = \alpha_1$ $k = 1$, $E = 1$, $K = \infty$, während für $\nu = \alpha_2$ $k = o$, $E = \frac{\pi}{2}$ und $K = \frac{\pi}{2}$ werden; also ist, wenn $\nu = \alpha_2$ wird, $\psi = o$, und wenn $\nu = \alpha_1$, d. h. gleich dem Radius des Kehlkreises ist, $\psi = \frac{\pi}{4}$.

Es bewegt sich also der durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Stral

$$y = u \,.\, \operatorname{tang} \psi,$$

wenn ν von α_1 bis α_2 läuft, in einem Winkel von $\frac{\pi}{4}$ bis o. Aber zu jedem bestimmten ν gehört nicht blos ein bestimmter Stral, sondern auch eine bestimmte der durch Gleichung 6b) gegebenen Kurven, und der Durchschnittspunkt derselben mit ihrem Strale ist der Berührungspunkt der jenem Werte von ν zugehörigen kürzesten Linie mit der Enveloppe.

Da ferner die Gleichung der Kurve die ungemein rasch convergirende Reihe enthält:

$$R = 2\pi \left\{ \frac{q^2}{1-q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{q^4}{1-q^4} \sin \frac{2\pi u}{K} + \ldots \right\},$$

so wiegt das Glied $\frac{\pi}{2} \operatorname{tang} \frac{\pi u}{2K}$ vor und kann benützt werden, um ein allgemeines Bild des Verlaufes der Kurve zu geben. Für $u = o$ geht diese vom Anfangspunkte der Coordinaten aus, berührt die in $u = K$ errichtete Senkrechte im Unendlichen, springt hier von $+\infty$ auf $-\infty$ über, schneidet bei $u = 2K$ die Abscissenaxe und trifft jetzt ihren zugehörigen Stral. Zwischen $u = 2K$ und $u = 3K$ muss also eine Lösung der Gleichung 5) liegen, wie es auch sein muss, denn für $u = 2K$ ist $z = \sin am(2K) = o$ und $r = \alpha_2$, die entsprechende Linie hat den grössten Kreis wieder erreicht und erst, nachdem sie ihn überschritten, kann sie die Enveloppe berühren, da für sie der Periodicitätsmodul negativ ist. Der weitere Verlauf der Kurve ist von geringerem Interesse.

Betrachten wir nun einen Augenblick die beiden Grenzwerte von ν genauer. Für $\nu = \alpha_2$ ist $\psi = o$ und $K = \frac{\pi}{2}$, d. h. der grösste Kreis ist in einer Ausdehnung kürzeste Linie, welche durch die Gleichung

$$2\frac{\varphi_0}{\tau} = 2\frac{\pi}{2};\ 2\varphi_0 = \tau\pi\ ^*)$$

*) Vergleich: Jacobi Dynamik. pag. 46.

gegeben ist. Für $\nu = \alpha_1$ wird $\psi = \frac{\pi}{4}$, $K = \infty$, d. h. das dem Durchschnittspunkte entsprechende $u > 2K$, also umsomehr unendlich; hiefür ist aber auch $\varphi = \infty$, und somit der asymptotische Verlauf der Enveloppe in der Nähe des Kehlkreises bewiesen. Die Durchschnittspunkte eines Strals und seiner zugehörigen Kurve liegen also auf einer vom Punkte $u = \frac{\pi}{2}$ beginnenden Kurve, deren Ausgangspunkt der Stral $y = o$ zugehört, und die sich immer weiter in's Unendliche erstreckt. Diese Kurve kann man mit grosser Genauigkeit construiren, indem man zu verschiedenen Werten von ν mittelst der Gleichungen 1 b) und 4 a) die Werte von K berechnet und zu jedem K einen Zweig der zugehörigen Kurve construirt. Berechnet man dann für den nämlichen Wert von K den Winkel ψ aus Gleichung 7), so ergibt sich ein Punkt der fraglichen Kurve. Ist dieselbe näherungsweise genau construirt, so entnimmt man zu irgend einem Punkte derselben das zugehörige u aus der Zeichnung und wendet, um den Wert desselben beliebig genau zu finden, eine Näherungsmethode, z. B. die Newton'sche, an.

Auf diese Weise kann man die Berechnung von u mit beliebiger Genauigkeit vollenden, und der gefundene Wert von u in die Gleichungen

$$z = \sin \mathrm{am}\, u \quad \text{und} \quad \varphi = \tau \,.\, u$$

eingesetzt liefert mit Hülfe der Substitutionsformel, welche nach § 8 z und r verbindet, r und φ eines Punktes der Enveloppe.

München im Mai 1878.

Fig. 1.

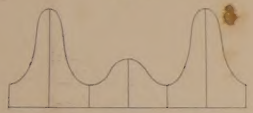
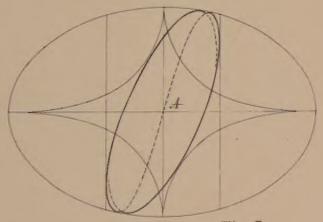
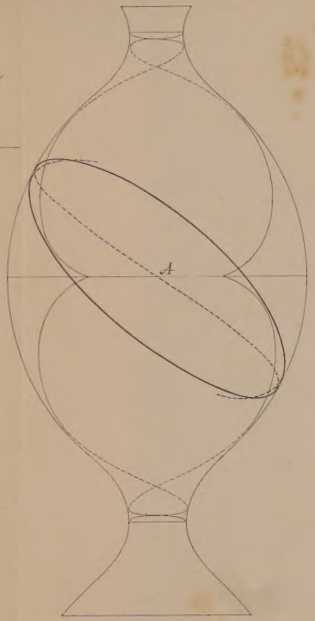
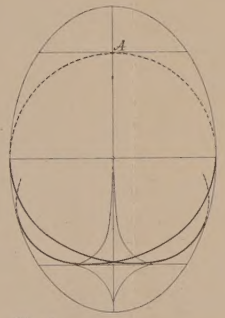


Fig. 3.

Fig. 2.







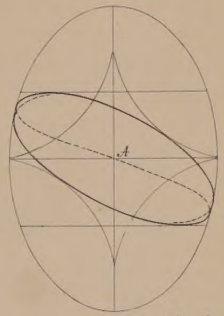


Fig. 4.

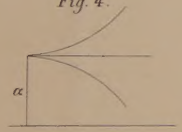


Fig. 7.

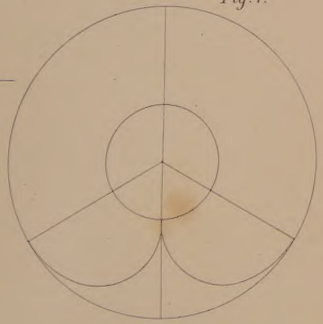


Fig. 8.

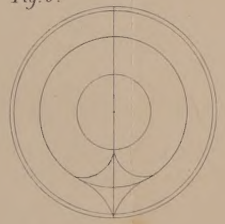


Fig. 9.

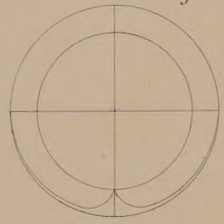


Fig. 10.

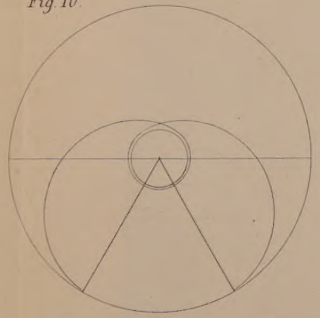


Fig. 5.

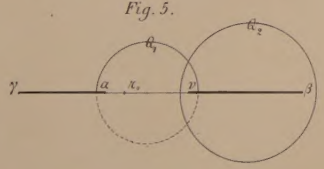


Fig. 6.

Lith. Anstalt v. Gebrüder Obpacher, München.